Całka oznaczona Riemanna

IMiIP, Inżynieria Obliczeniowa, Analiza matematyczna 2

Anna Bahyrycz

Literatura

[1] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 Definicje, twierdzenia, wzory*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2011

[2] M. Gewert, Z. Skoczylas, *Analiza matematyczna 2 Przykłady i zadania*, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław 2012

[3] W. Krysicki, L. Włodarski, *Analiza matematyczna w zadaniach*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2004

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie funkcją ograniczoną. Oznaczmy

$$m := \inf f([a,b]), \quad M := \sup f([a,b]).$$

Podziałem $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ nazywać będziemy skończony ciąg $x_0, x_1, \ldots, x_k$ taki, że

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{k-1} < x_k = b.$$

Średnicą podziału $\mathcal{P}$ nazywamy

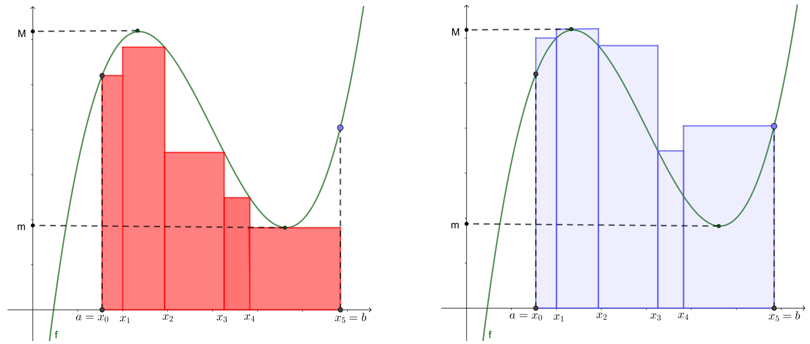
$$\delta(\mathcal{P}) := \max\{\Delta x_i : \ i \in \{1,\ldots,k\}\},$$

gdzie $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i \in \{1,\ldots,k\}$. Niech dla

$$m_i := \inf f([x_{i-1},x_i]), \quad M_i := \sup f([x_{i-1},x_i]), \qquad i \in \{1,\ldots,k\}.$$

Dolną (górną) sumą całkową podziału $\mathcal{P}$ nazywamy (odpowiednio)

$$s(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i, \quad \Big(S(\mathcal{P}) := \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i\Big).$$



Ilustracja dolnej sumy całkowej i górnej sumy całkowej podziału $\mathcal{P} = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ funkcji f na przedziale $[a,b]$

Jeżeli $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}'$ są dwoma podziałami przedziału $[a,b]$ oraz $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}'$, mówimy, że $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$.
Ciąg podziałów $(\mathcal{P}_n)$ przedziału $[a,b]$ nazywamy normalnym, jeśli

$$lim_{n\to\infty}\delta(\mathcal{P}_n) = 0.$$

Oznacza to, że gdy n rośnie, to uzyskane podprzedziały (czyli części, na które dzielimy przedział $[a,b]$) są coraz mniejsze.

Uwaga 1

1. $m(b-a) \le s(\mathcal{P}) \le S(\mathcal{P}) \le M(b-a)$
2. *jeżeli $\mathcal{P}'$ jest podpodziałem podziału $\mathcal{P}$, to*
$$s(\mathcal{P}) \le s(\mathcal{P}'), \quad S(\mathcal{P}') \le S(\mathcal{P})$$
3. *jeżeli $(\mathcal{P}_n)$ jest normalnym ciągiem podziałów, to istnieją granice $\lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n)$ oraz $\lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$*
4. *powyższe granice nie zależą od wyboru normalnego ciągu podziałów, nazywamy je odpowiednio całką dolną (górną) funkcji f i oznaczamy odpowiednio*
$$\underline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n), \quad \overline{\int_a^b} f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n)$$

Definicja 1

Funkcja ograniczona $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ jest całkowalna w sensie Riemanna gdy jej całka dolna jest równa całce górnej.
Tę wspólną wartość nazywamy całką oznaczoną Riemanna funkcji f w przedziale $[a,b]$ i oznaczamy symbolem

$$\int_a^b f(x)dx.$$

W powyższej całce liczbę a nazywamy dolną granicą całkowania, liczbę b górną granicą całkowania, natomiast f funkcją podcałkową.
Ponadto przyjmujemy, że

$$\int_a^a f(x)dx = 0, \quad \int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

Uwaga 2

1. $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$
2. *jeżeli dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieje podział $\mathcal{P}$ przedziału $[a,b]$ taki, że $S(\mathcal{P}) - s(\mathcal{P}) < \varepsilon$, to f jest całkowalna w sensie Riemanna*

Przyjrzyjmy się, w jaki sposób można obliczyć całkę oznaczoną Riemanna korzystając z definicji.

Przykład 1

Obliczyć całkę oznaczoną funkcji stałej f przyjmującej wartość $c\in\mathbb{R}$ na przedziale $[a,b]$.
Funkcja f jest ograniczona oraz $m_i = M_i = c$ dla każdego $\Delta x_i \subset [a,b]$, bo f jest funkcją stałą. Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ odcinka $[a,b]$ otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c\Delta x_i$$

$$= c\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = c\lim_{n\to\infty}(x_1-x_0)+\ldots+(x_n-x_{n-1}) = c\lim_{n\to\infty}(b-a) = c(b-a)$$

i analogicznie

$$\overline{\int_a^b} c\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n c\Delta x_i = c(b-a).$$

Ponieważ całki dolna i górna z funkcji stałej przyjmującej wartość $c\in\mathbb{R}$ na przedziale $[a,b]$ są równe, więc całka oznaczona z tej funkcji na przedziale $[a,b]$ istnieje oraz

$$\int_a^b c\,dx = c(b-a).$$

Wykażemy teraz, że nie każda funkcja ograniczona jest całkowalna.

Przykład 2

Pokazać, że **funkcja Dirichleta** *określona wzorem*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \textit{dla} \quad x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \textit{dla} \quad x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases}$$

nie jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale $[a,b]\subset\mathbb{R}$.
Funkcja f jest ograniczona oraz $m_i = 0$ i $M_i = 1$ dla każdego $\Delta x_i \subset [a,b]$,
bo w każdym przedziale są zarówno liczby wymierne jak i niewymierne.
Rozważając dowolny ciąg podziałów normalnych $(\mathcal{P}_n)$ odcinka $[a,b]$ otrzymujemy

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} s(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n 0\cdot\Delta x_i = 0\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = 0\cdot(b-a) = 0$$

zaś

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n 1\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n \Delta x_i = b-a.$$

Ponieważ całki dolna i górna z funkcji Dirichleta na dowolnym przedziale $[a,b]$ są **różne** *więc całka oznaczona Riemanna z tej funkcji na przedziale $[a,b]$ nie istnieje.*

Przykład 3

Oszacować wartość całki

$$\int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx.$$

Obliczenie tej całki nie byłoby łatwym zadaniem.
Zauważmy, że dla każdego $x \in [0,2]$ *zachodzą nierówności* $0 \leq x^4 \leq 16$, *a zatem* $1 \leq 1+x^4 \leq 17$. *Ponieważ funkcja pierwiastkowa jest funkcją rosnącą, to*

$$1 \leq \sqrt{1+x^4} \leq \sqrt{17}.$$

Skoro długość przedziału całkowania wynosi 2, to na mocy Uwagi 2 dostajemy następujące oszacowanie wartości całki:

$$2 \leq \int_0^2 \sqrt{1+x^4}\,dx \leq 2\sqrt{17}.$$

Przykład 4

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna obliczyć

$$\int_0^2 x\,dx.$$

Funkcja podcałkowa $f(x)=x$ *jest funkcją ciągłą, stąd na mocy Twierdzenia 1 całka ta istnieje. Zatem przy dowolnym wyborze ciągu podziałów normalnych odcinka* $[0,2]$ *całka dolna i górna są równe. Możemy więc wybrać jeden szczególny ciąg podziałów normalnych* $(\mathcal{P}_n)$ *odcinka* $[0,2]$ *w taki sposób, by łatwo było obliczyć granicę* $\lim_{n\to+\infty} S(\mathcal{P}_n)$. *Dla ustalonego* n *wybierzmy punkty podziału* $x_i=\frac{2}{n}i$, *wówczas* $M_i=\frac{2}{n}i$ *dla* $i=1,\ldots,n$. *Każdy z odcinków* $[x_{i-1},x_i]$ *ma tę samą długość* $\Delta x_i=\frac{2}{n}$. *Oznacza to, że*

$$\delta(\mathcal{P}_n)=\frac{2}{n}, \quad \textit{a stąd} \quad \lim_{n\to+\infty}\delta(\mathcal{P}_n)=0.$$

Uwzględniając to możemy wykonać następujące obliczenia:

$$\int_0^2 x dx = \overline{\int_0^2} x dx = \lim_{n\to\infty} S(\mathcal{P}_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{2}{n}i\Big)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\sum_{i=1}^n i$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\cdot(1+2+\cdots+n) = \lim_{n\to\infty}\frac{4}{n^2}\cdot\frac{(1+n)n}{2} = 2\lim_{n\to\infty}\frac{1+n}{n} = 2.$$

Warunki wystarczające całkowalności

Twierdzenie 1

Funkcja ciągła na przedziale $[a,b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Twierdzenie 2

Funkcja monotoniczna na przedziale $[a,b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Twierdzenie 3

Funkcja, która ma skończoną liczbę punktów nieciągłości w przedziale $[a,b]$ *jest całkowalna w sensie Riemanna na tym przedziale.*

Analizując Przykład 4 otrzymujemy następujący

Wniosek 1

Jeżeli funkcja f *jest całkowalna na przedziale* $[a,b]$, *to*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\Big[\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n f\Big(a+i\,\frac{b-a}{n}\Big)\Big].$$

Przykład 5

Korzystając z definicji całki oznaczonej Riemanna uzasadnić równość:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3}=\frac{1}{3}.$$

W rozwiązaniu skorzystamy z Wniosku 1. Mamy

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \lim_{n\to+\infty}\Big[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{i}{n}\Big)^2\Big].$$

We wzorze z Wniosku 1 przyjmujemy $[a,b]=[0,1]$ *oraz* $f(x)=x^2$ *i dostajemy*

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n^3} = \int_0^1 x^2\,dx \quad \textit{(dalej z Twierdzenia Newtona-Leibniza).}$$

Drugie zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna opisujące związek między całką oznaczoną i nieoznaczoną

Twierdzenie 4 (Newtona- Leibniza)

Jeżeli $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *jest funkcją ciągłą, to ma ona funkcję pierwotną* F *oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Różnicę wartości funkcji pierwotnej na końcach przedziału występującą w powyższym wzorze zapisujemy również w następujący sposób:

$$F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Przykład 6

Obliczyć:

(a) $\int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3 + C\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\cdot 1^3 + C - \left(\frac{1}{3}\cdot 0^3 + C\right) = \frac{1}{3}$;

(b) $\int_0^\pi \sin x\,dx$

$= (-\cos x + C)\Big|_0^\pi = -\cos\pi + C - (-\cos 0 + C) = 1 + C + 1 - C = 2.$

Przykład 7

Obliczyć

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx.$$

Ponieważ

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geq 0 \\ -x & \text{dla} \quad x < 0 \end{cases},$$

więc korzystając najpierw z Twierdzenia o addytywności całki względem przedziału całkowania, a następnie z Twierdzenia Newtona-Leibniza otrzymujemy

$$\int_{-1}^2 |x|\,dx = \int_{-1}^0 |x|\,dx + \int_0^2 |x|\,dx$$

$$= \int_{-1}^0 -x\,dx + \int_0^2 x\,dx = -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^0 + \frac{1}{2}x^2\Big|_0^2$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot 0^2 - \left(-\frac{1}{2}\cdot(-1)^2\right) + \frac{1}{2}\cdot 2^2 - \frac{1}{2}\cdot 0^2$$

$$= \frac{1}{2} + 2 = 2\frac{1}{2}.$$

Własności całki oznaczonej

Twierdzenie 5 (O liniowości całki oznaczonej)

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna i niech* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*. Wówczas*

$$\int_a^b \big(\alpha f(x) + \beta g(x)\big)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 6 (O addytywności całki względem przedziału całkowania)

Niech $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna oraz* $c \in (a, b)$*. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 7

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *oraz* f *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna i niech funkcja* g *różni się od funkcji* f *tylko w skończonej liczbie punktów. Wówczas funkcja* g *jest całkowalna w sensie Riemanna oraz*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 8

Niech $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami całkowalnymi w sensie Riemanna i niech* $f(x) \leq g(x)$ *dla* $x \in [a, b]$*. Wówczas*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Twierdzenie 9 (O oszacowaniu wartości bezwzględnej całki)

Jeżeli f jest funkcją całkowalną na przedziale $[a,b]$, to

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

Twierdzenie 10 (O wartości średniej)

Jeżeli f jest funkcją ciągłą na przedziale $[a,b]$, to istnieje punkt $c \in [a,b]$ taki, że

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

Twierdzenie 11

Jeżeli funkcje f, g mają ciągłe pochodne na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Przykład 8

Obliczyć

$$\int_1^e \ln x\,dx.$$

$$\int_1^e \ln x\,dx = \left|\begin{array}{ll} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = 1 & v(x) = x \end{array}\right| = x\ln x\Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x\,dx$$

$$= x\ln x\Big|_1^e - x\Big|_1^e = e - 0 - (e-1) = 1.$$

Uwaga. *Można również najpierw znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \ln x$ i zastosować Twierdzenie Newtona-Leibniza, tzn.*

$$\int \ln x\,dx = x\ln x - x + C, \text{ a stąd } \int_1^e \ln x\,dx = (x\ln x - x)\Big|_1^e = e - e - (0-1) = 1.$$

Twierdzenie 12

Niech $\varphi : [a,b] \to [\alpha,\beta]$ i $f : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ będą funkcjami ciągłymi. Jeżeli φ ma ciągłą pochodną na przedziale $[a,b]$, to

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.$$

Przykład 9

Obliczyć

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx.$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx = \left|\begin{array}{l} t = x^2+1 \\ dt = 2x\,dx \\ \frac{1}{2}\,dt = x\,dx \end{array}\right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}\Big|_1^2 = \sqrt{2} - 1.$$

Zauważmy, że dokonaliśmy tu następującej zmiany wartości granic całkowania:

x	0	1
$t = x^2+1$	1	2

Uwaga. *Można również najpierw znaleźć funkcję pierwotną funkcji $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ (czyli $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$) i zastosować Twierdzenie Newtona-Leibniza.*

Na podstawie twierdzenia o całkowaniu przez podstawienie możemy sformułować następujące wnioski.

Wniosek 2 (O całce z funkcji parzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a jest liczbą dodatnią, natomiast $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ jest parzystą funkcją ciągłą, to

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

DOWÓD.

$$\int_{-a}^a f(x)\,dx = \int_{-a}^0 f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx.$$

Dokonując w pierwszej z całek występujących w powyższej sumie podstawienia $t = -x$ i stosownej zmiany granic całkowania

x	$-a$	0
$t = -x$	a	0

otrzymujemy

$$-\int_a^0 f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(-t)\,dt + \int_0^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

Ostatnia równość wynika z faktu, że f jest funkcją parzystą oraz zamiany symbolu zmiennej całkowania z t na x.

Rozumując analogicznie jak powyżej, możemy otrzymać kolejny wniosek.

Wniosek 3 (O całce z funkcji nieparzystej w przedziale symetrycznym względem zera)

Jeżeli a *jest liczbą dodatnią, natomiast* $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ *jest nieparzystą funkcją ciągłą, to*

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

Powyższe wnioski mają dość duże znaczenie w praktycznych obliczeniach, gdyż niejednokrotnie prościej jest znaleźć wartość funkcji pierwotnej w zerze niż w $-a$. W szczególności powyższy wniosek pozwala natychmiast podać wartość liczbową niektórych całek bez konieczności przeprowadzania złożonych rachunków.

Przykład 10

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x\,dx.$$

Ponieważ funkcja $f(x) = x^2 \sin x$ *jest nieparzystą funkcją ciągłą, gdyż* $f(-x) = (-x)^2 \sin(-x) = x^2 \cdot (-\sin x) = -f(x)$, *a przedział* $[-\pi, \pi]$ *jest przedziałem symetrycznym względem zera, więc szukana całka jest równa 0.*

Twierdzenie 13

Jeżeli funkcja f *ma okres* T *oraz jest całkowalna w sensie Riemanna na przedziale* $[0, T]$, *to dla dowolnego* $a \in \mathbb{R}$ *mamy*

$$\int_{a}^{a+T} f(x)\,dx = \int_{0}^{T} f(x)\,dx\,.$$

Przykład 12

Obliczyć całkę:

$$\int_{1}^{1+2\pi} \sin x\,dx.$$

$$\int_{1}^{1+2\pi} \sin x\,dx = \int_{0}^{2\pi} \sin x\,dx = -\cos x\Big|_{0}^{2\pi} = -\cos 2\pi + \cos 0 = -1 + 1 = 0.$$

Przykład 11

Obliczyć całkę oznaczoną

$$\int_{-\ln 2}^{\ln 2} \frac{e^x - 1}{e^x + 1}\,dx.$$

Pokażemy, że funkcja ciągła $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$ *jest funkcją nieparzystą. Rzeczywiście*

$$f(-x) = \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = \frac{\frac{1}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = -\frac{e^x - 1}{e^x + 1} = -f(x).$$

Ponieważ ponadto przedział $[-\ln 2, \ln 2]$ *jest przedziałem symetrycznym względem zera, to szukana całka jest równa 0.*

Pierwsze zasadnicze twierdzenie rachunku całki oznaczonej Riemanna

Twierdzenie 14 (O funkcji górnej granicy całkowania)

Niech f *będzie funkcją całkowalną w sensie Riemanna na przedziale* $[a, b]$, $c \in [a, b]$ *i niech*

$$F(x) := \int_{c}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in [a, b].$$

Wówczas

1. *funkcja* F *jest ciągła,*
2. *jeżeli* f *jest funkcją ciągłą w punkcie* $x_0 \in [a, b]$, *to funkcja* F *jest funkcją różniczkowalną w punkcie* x_0 *oraz*

   $$F'(x_0) = f(x_0),$$

   przy czym jeżeli $x_0 = a$ *lub* $x_0 = b$, *to pochodną funkcji* F *w punkcie* x_0 *rozumiemy jako pochodną jednostronną.*

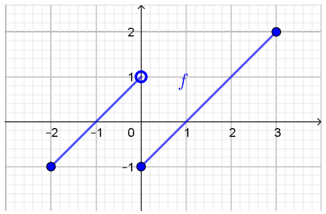
Przykład 13

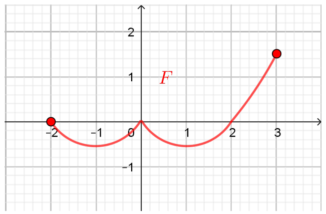
Wyznaczyć funkcję górnej granicy całkowania $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$, $x \in [-2,3]$, *jeśli funkcja*

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ x-1 & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$

Narysować wykresy funkcji f *i* F.
Wyznaczymy najpierw funkcję górnej granicy całkowania

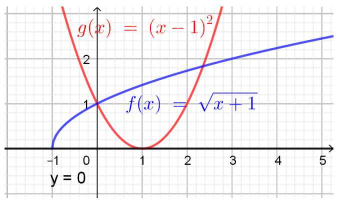
$$F(x) = \begin{cases} \int_0^x (t+1)\,dt & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \int_0^x (t-1)\,dt & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x^2}{2} + x & \textit{dla} \quad -2 \le x < 0 \\ \frac{x^2}{2} - x & \textit{dla} \quad 0 \le x \le 3 \end{cases}.$$





Przykład 14

Obliczyć pole obszaru zawartego pomiędzy wykresami funkcji $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = (x-1)^2$, *gdzie* $x \in [-1,1]$ *oraz osią* $0x$.



Zauważmy, że rozpatrywana figura jest sumą dwóch trapezów krzywoliniowych

$$T_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le \sqrt{x+1},\ x \in [-1,0]\},$$
$$T_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le (x-1)^2,\ x \in [0,1]\},$$

więc jej pole jest równe sumie pól tych trapezów. Korzystając z interpretacji geometrycznej całki oznaczonej, otrzymujemy

$$|D_{T_1}| = \int_{-1}^0 \sqrt{x+1}\,dx = \tfrac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}\Big|_{-1}^{0} = \tfrac{2}{3},$$

$$|D_{T_2}| = \int_0^1 (x-1)^2\,dx = \tfrac{1}{3}(x-1)^3\Big|_0^1 = \tfrac{1}{3}.$$

Szukane pole wynosi zatem $|D| = |D_{T_1}| + |D_{T_2}| = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$.

Zastosowania rachunku całkowego

Twierdzenie 15

Jeżeli $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *jest nieujemną funkcją ciągłą, to pole obszaru* D *ograniczonego wykresem funkcji* f, *osią* Ox *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$ *wyraża się wzorem*

$$|D| = \int_a^b f(x)\,dx.$$

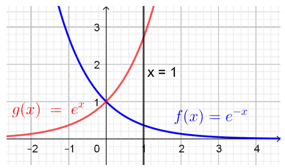
Wniosek 4 (pole trapezu krzywoliniowego)

Niech $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *będą funkcjami ciągłymi takimi, że* $f(x) \le g(x)$ *dla* $x \in [a,b]$. *Wówczas pole obszaru* D *ograniczonego wykresami funkcji* f *i* g *oraz prostymi* $x = a$ *i* $x = b$ *jest równe*

$$|D| = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)\,dx.$$

Przykład 15

Znaleźć pole figury zawartej między wykresami funkcji $f(x) = e^{-x}$ *i* $g(x) = e^x$ *oraz prostą* $x = 1$.



Dla każdego $x \in [0,1]$ *zachodzi nierówność* $f(x) \le g(x)$, *więc szukane pole obliczamy w następujący sposób:*

$$|D| = \int_0^1 \left(e^x - e^{-x}\right) dx = \left(e^x + e^{-x}\right)\Big|_0^1 = e + e^{-1} - 2.$$

Definicja 2

Mówimy, że Γ jest krzywą zadaną parametrycznie*, jeżeli istnieją funkcje ciągłe $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ oraz $\psi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ takie, że*

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = \varphi(t), y = \psi(t) \ \text{dla } t \in [\alpha, \beta]\}.$$

Twierdzenie 16 (O polu obszaru ograniczonego łukiem krzywej zadanej parametrycznie)

Niech Γ będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcja φ jest rosnąca i ma w każdym punkcie przedziału $[\alpha, \beta]$ ciągłą pochodną, a funkcja ψ jest nieujemna. Pole $|D|$ obszaru ograniczonego łukiem krzywej Γ, odcinkiem osi OX oraz prostymi $x = a$, $x = b$, gdzie $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, wyraża się wzorem

$$|D| = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Zauważmy, że $\varphi'(t) = \psi(t) \geq 0$ dla każdego $t \in [0, 2\pi]$, więc spełnione są założenia powyższego twierdzenia. Zatem

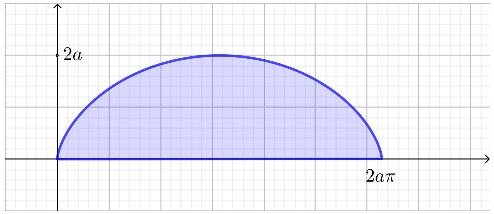
$$\begin{aligned}
|D| &= \int_0^{2\pi} \psi(t)\varphi'(t)dt = \int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)dt \\
&= a^2 \int_0^{2\pi} (1-\cos t)^2 dt = a^2 \int_0^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt \\
&= a^2 \left((t - 2\sin t)\Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt \right) \\
&= a^2 \left(2\pi + \frac{1}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Big|_0^{2\pi} \right) = a^2(2\pi + \pi) = 3\pi a^2.
\end{aligned}$$

Przykład 16

Obliczymy pole obszaru ograniczonego osią Ox i jednym łukiem krzywej zwanej cykloidą *, która zadana jest równaniami parametrycznymi*

$$\begin{cases} x = \varphi(t) := a(t - \sin t), \\ y = \psi(t) := a(1 - \cos t), \end{cases}$$

gdzie a jest ustaloną liczbą dodatnią.
Cykloida to krzywa opisująca tor ruchu punktu leżącego na obwodzie koła o promieniu a, które toczy się bez poślizgu po prostej. Zauważmy, że wartości $y = \psi(t)$ powtarzają się cyklicznie, gdy parametr t przebiega każdy z przedziałów $[2k\pi, 2(k+1)\pi]$, gdzie k jest liczbą całkowitą. Dla naszych potrzeb wybierzmy jeden z takich przedziałów, np. $[0, 2\pi]$.



Cykloida

Twierdzenie 17

Załóżmy, że funkcja $f : [\alpha, \beta] \to [0, \infty)$ jest ciągła $0 < \beta - \alpha < 2\pi$. Jeżeli krzywa dana jest w biegunowym układzie współrzędnych równaniem $r = f(\phi)$, to pole obszaru D ograniczonego wykresem funkcji f oraz półprostymi $\phi = \alpha$ i $\phi = \beta$ wyraża się wzorem

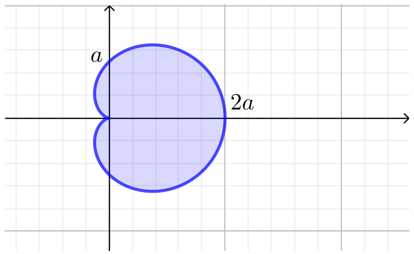
$$|D| = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\phi = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} \big(f(\phi)\big)^2 d\phi.$$

Przykład 17

Wyznaczmy pole figury ograniczonej przez kardioidę, czyli krzywą zdefiniowaną biegunowo za pomocą przepisu

$$r = a(1+\cos\phi), \quad \textit{gdzie} \quad \phi \in [-\pi,\pi],$$

przy czym a jest ustaloną liczbą dodatnią. Gdy wartości kąta ϕ rosną od 0 do $\frac{\pi}{2}$, to wartości cosinusa maleją od 1 do 0, a więc promień r maleje od $a(1+\cos 0) = 2a$ do $a(1+\cos\frac{\pi}{2}) = a$. Z kolei, gdy ϕ rośnie od $\frac{\pi}{2}$ do π, to wartości funkcji cosinus maleją od 0 do -1, a więc promień r maleje od a do $a(1+\cos\pi) = 0$. Ponadto promień r rośnie od 0 do $2a$ dla kąta ϕ zmieniającego się od $-\pi$ do 0. Ponieważ wykres funkcji cosinus jest symetryczny względem osi Oy, to kardioida jest symetryczna względem osi Ox.



Kardioida

Twierdzenie 18 (długość krzywej zadanej parametrycznie)

Załóżmy, że funkcje $\varphi,\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ mają ciągłe pochodne. Wówczas długość krzywej $L = \{(\varphi(t),\psi(t)) :\ t \in [\alpha,\beta]\}$ wyraża się wzorem

$$|L| = \int_\alpha^\beta \sqrt{\big(\varphi'(t)\big)^2 + \big(\psi'(t)\big)^2}\,dt.$$

Wniosek 5 (długość krzywej)

Załóżmy, że funkcja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ma ciągłą pochodną. Wówczas długość krzywej $L = \{(x,f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ wyraża się wzorem

$$|L| = \int_a^b \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx.$$

Korzystając z powyższego twierdzenia i symetrii rozpatrywanego obszaru względem osi Ox, otrzymujemy

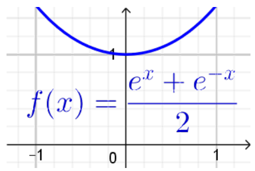
$$|D| = 2\cdot\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2 d\phi = \int_0^\pi a^2(1+\cos\phi)^2 d\phi = a^2\int_0^\pi (1+2\cos\phi+\cos^2\phi)d\phi$$

$$= a^2\Big[\phi\Big|_0^\pi + 2\sin\phi\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2}\big(1+\cos 2\phi\big)d\phi\Big] = a^2\Big[\pi + \frac{1}{2}\phi\Big|_0^\pi + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\phi}{2}\Big|_0^\pi\Big]$$

$$= 2a^2\Big[\pi + \frac{\pi}{2}\Big] = 3\pi a^2.$$

Przykład 18

Obliczyć długość linii łańcuchowej
$\cosh x = \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big)$, *gdzie* $x \in [-1,1]$.



Mamy $f'(x) = \frac{1}{2}\big(e^x - e^{-x}\big)$ *- funkcja ciągła oraz*

$$1 + \big(f'(x)\big)^2 = \frac{4 + e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{\big(e^x + e^{-x}\big)^2}{4}.$$

Zatem

$$|L| = \int_{-1}^1 \sqrt{1 + \big(f'(x)\big)^2}\,dx = \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{\big(e^x + e^{-x}\big)^2}{4}}\,dx = 2\int_0^1 \frac{1}{2}\big(e^x + e^{-x}\big)\,dx$$

$$= e^x - e^{-x}\Big|_0^1 = e - e^{-1} - (1-1) = e - e^{-1}.$$

Wniosek 6

Załóżmy, że funkcja $f:[\alpha,\beta]\to[0,\infty)$ ma ciągłą pochodną $0<\beta-\alpha<2\pi$. Jeżeli krzywa L dana jest w biegunowym układzie współrzędnych równaniem $r=f(\phi)$, $\alpha\le\phi\le\beta$, to jej długość wyraża się wzorem

$$|L|=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}d\phi=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\Big(f(\phi)\Big)^2+\Big(f'(\phi)\Big)^2}d\phi.$$

Twierdzenie 20 (objętość bryły obrotowej)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ będzie nieujemną funkcją ciągłą, D obszarem ograniczonym wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x=a$ i $x=b$. Wówczas objętość bryły obrotowej V powstałej w wyniku obrotu obszaru D dookoła osi Ox jest równe

$$|V|=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx.$$

Twierdzenie 21 (objętość bryły obrotowej)

Niech $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ $(a\ge 0)$ będzie nieujemną funkcją ciągłą, D obszarem ograniczonym wykresem funkcji f, osią Ox oraz prostymi $x=a$ i $x=b$. Wówczas objętość bryły obrotowej V powstałej w wyniku obrotu obszaru D dookoła osi Oy wyrażą się wzorem

$$|V|=2\pi\int_a^b xf(x)\,dx.$$

Twierdzenie 19 (O objętości bryły powstałej z obrotu łuku krzywej zadanej parametrycznie wokół osi Ox)

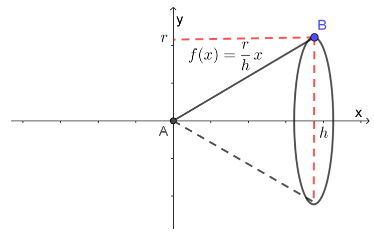
Niech Γ będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcje φ,ψ mają ciągłe pochodne oraz funkcja φ jest rosnąca lub malejąca, a funkcja ψ jest nieujemna. Objętości bryły powstałej z obrotu łuku krzywej Γ wokół osi Ox wyraża się wzorem

$$|V|=\pi\int\limits_{\alpha}^{\beta}\psi^2(t)\,|\varphi'(t)|dt.$$

Przykład 19

Korzystając z Twierdzenia o objętości bryły powstałej przez obrót wykresu funkcji jednej zmiennej wokół osi Ox obliczyć objętość stożka, którego wysokość jest równa h, a promień jego podstawy wynosi r.
Zauważmy, że stożek ten powstaje z obrotu odcinka o końcach w punktach $A=(0,0)$ i $B=(h,r)$ $(h>0,\ r>0)$ wokół osi Ox. Ogólnie prostą przechodzącą przez punkty (x_A,y_A) oraz (x_B,y_B) możemy opisać za pomocą równania

$$y-y_A=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}(x-x_A),\quad \text{czyli u nas}\quad y=\frac{r}{h}x,\ \text{ gdzie } x\in[0,h].$$



Szukaną objętość możemy zatem obliczyć w następujący sposób:

$$|V|=\pi\int_0^h\left(\frac{r}{h}x\right)^2dx=\frac{r^2}{h^2}\pi\int_0^h x^2\,dx=\frac{r^2}{h^2}\pi\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^h=\frac{1}{3}\pi r^2h.$$

Twierdzenie 22 (O polu powierzchni bryły powstałej z obrotu łuku krzywej zadanej parametrycznie wokół osi Ox)

Niech Γ będzie krzywą zadaną parametrycznie, jak jest to opisane w definicji 2. Załóżmy dodatkowo, że funkcje φ, ψ mają ciągłe pochodne oraz funkcja φ jest rosnąca lub malejąca, a funkcja ψ jest nieujemna. Pole powierzchni bryły powstałej z obrotu łuku krzywej Γ wokół osi Ox wyraża się wzorem

$$|P| = 2\pi \int\limits_{\alpha}^{\beta} \psi(t)\, \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2} dt.$$

Twierdzenie 24 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a \geq 0)$ będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną. Wówczas pole powierzchni P powstałej w wyniku obrotu krzywej $L = \{(x, f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ dookoła osi Oy wyraża się wzorem

$$|P| = 2\pi \int_a^b x\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Twierdzenie 23 (pole powierzchni obrotowej)

Niech $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją nieujemną z ciągłą pochodną, P powierzchnią powstałą w wyniku obrotu krzywej $L = \{(x, f(x)) :\ x \in [a,b]\}$ dookoła osi Ox. Wówczas pole powierzchni P wyraża się wzorem

$$|P| = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \left(f'(x)\right)^2}\, dx.$$

Przykład 20

Obliczyć pole powierzchni obrotowej P powstałej przez obrót łuku sinusoidy $f(x) = \sin x$, gdzie $x \in [0,\pi]$ wokół osi $0x$.

Ponieważ funkcja $\sin x$ na przedziale $[0,\pi]$ jest nieujemna i ma ciągłą pochodną, to pole powierzchni P wyraża się wzorem

$$|P| = 2\pi \int_0^{\pi} \sin x\sqrt{1 + \cos^2 x}\, dx$$

$$= \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x\, dx \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = \pi \Rightarrow t = -1 \end{array} \right| = -2\pi \int_1^{-1} \sqrt{1+t^2}\, dt$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{1} \sqrt{1+t^2}\, dt = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+t^2}\, dt = \dots = 4\pi\left(\frac{1}{2}t\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln|t + \sqrt{1+t^2}|\right)\Big|_0^1$$

$$= 2\pi\left(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2}) - (0+0)\right) = 2\pi\sqrt{2} + 2\pi\ln(1+\sqrt{2}).$$

Zastosowania całki oznaczonej w fizyce

Twierdzenie 25 (droga przebyta w ruchu zmiennym)

Punkt materialny porusza się ze zmienną szybkością $v : [0,T] \to \mathbb{R}$ (ciągła), $T_1, T_2 \in [0,T]$. Droga przebyta przez ten punkt w czasie od T_1 do T_2 jest równa

$$s = \int_{T_1}^{T_2} v(t)\, dt.$$

Twierdzenie 26 (praca wykonana przez zmienną siłę)

Załóżmy, że równolegle do osi Ox działa zmienna siła $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ (ciągła). Praca wykonana przez te siłę od punktu a do punktu b jest równa

$$W = \int_a^b F(x)\, dx.$$